# Lineáris programozási feladat, Normálfeladat, Szimplex módszer

Dr. Kövér György

## Bevezet

A lineáris programozás a gyakorlat által felvetett problémák széles körére kínál megoldást. Legszemléletesebben talán akkor mutatható be, ha a feladatunk a következ:
Tervezzük meg a Vállalat által legyártandó termékek mennyiségét, ha a rendelkezésre álló erforrások, úgymint az egyes termelési folyamatokhoz szükséges munkaer, gépóra kapacitás, felhasználandó raktárkészlet, stb. korlátozottan áll rendelkezésre. A termékösszetétel megtervezésekor a szkös erforrások figyelembevételén túl alkalmasan választott gazdasági optimum elérésére törekszünk.
A feladat megoldásához lineáris modellt alkotunk, ami azt jelenti, hogy a modellben szerepl matematikai kifejezések, egyenletek, egyenltlenségek, függvények szükségképpen lineárisak. A gyakorlatból származó feladatokra kidolgozott modellek több ezer egyenletet, egyenltlenséget is tartalmazhatnak.

Tekintsük a következ nagyon egyszer feladatot.
A Nyílászáró Üzem ajtók és ablakok gyártásával foglalkozik. Míg az alapanyagot korlátlanul biztosítják a beszállítók, a mhelyek mérete adott, a szakképzett dolgozói létszám sem bvíthet. Az ajtó- és ablakgyártás faipari munkát, felületkezelést, üvegezést és szerelést igényel, egy termékhez szükséges munkaidt az alábbi táblázatban találjuk:

**táblázat: Nyílászáró üzem, munkaid szükséglete**

| | Ajtó | Ablak |
|---|---|---|
| **Faipari munka** | 8 óra | 4 óra |
| **Felületkezelés** | 3 óra | 6 óra |
| **Üvegezés, szerelés** | 1 óra | 0 óra |

Az üzemben dolgozók napi 40 óra faipari, 42 óra felületkezelési és 4 óra üvegezés, szerelés kapacitással rendelkeznek. A kereskedelmi igazgatóság tájékoztatása szerint 3 ezer Ft egy ajtón a nyereség, míg egy ablakon 5 ezer Ft.  Arról is tudunk, hogy a következ negyedévben az ablakokon elérhet nyereség 9 ezer Ft-ra növekszik.  Az üzem termékei keresettek, annyit tud értékesíteni, amennyit el tudnak állítani.

## A matematikai modell

Jelölje $x_1$ és $x_2$ az egy nap alatt gyártott ajtók, illetve az ablakok számát. A jelöléseket felhasználva a megadott adatok szerint az üzem egy napi faipari kapacitásából $8 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2$ munkaórát köt le. A

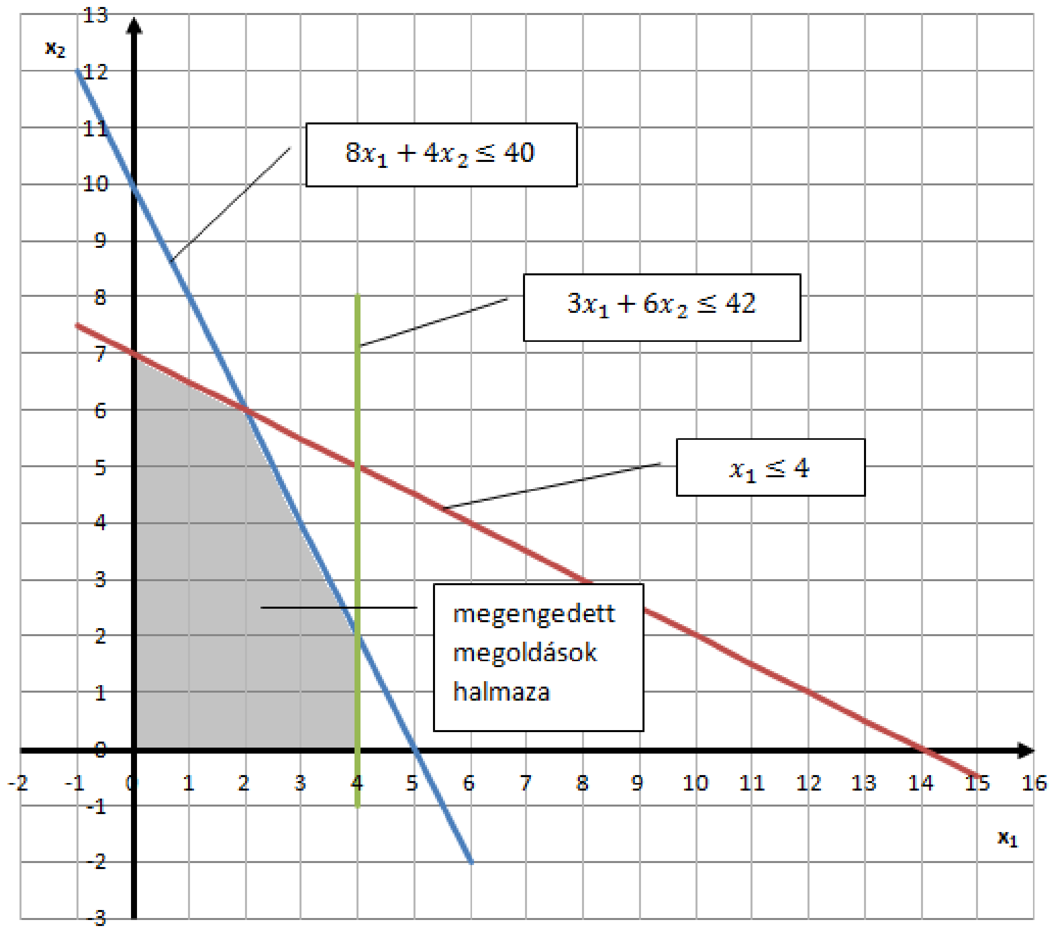
felületkezelési kapacitásból $3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2$ munkaórát, az üvegezés, szerelésbl $1 \cdot x_1$ órát. A gyártási folyamat igénye természetesen egyik erforrás esetén sem haladhatja meg Az üzem kapacitását.
A gyártási folyamat kapacitás igényét és a korlátozó feltételeket lineáris egyenltlenség rendszerrel fejezhetjük ki.

$$8 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 40,$$
$$3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \leq 42,$$
$$x_1 \leq 4,$$
$$x_1 \geq 0,$$
$$x_2 \geq 0$$

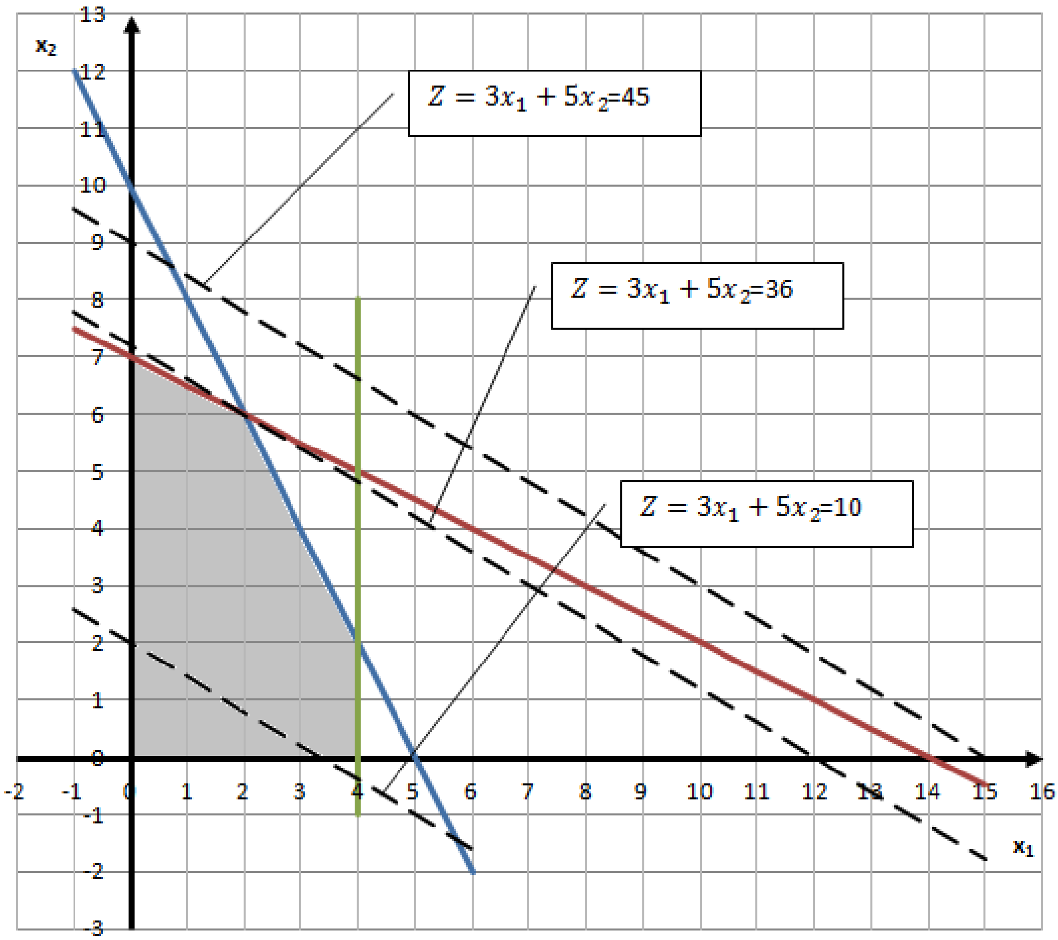
Mivel ajtó és ablakok gyártásáról szól a modell, ezért fel kell tennünk azt is, hogy $x_1$ és $x_2$ csak pozitív, vagy nulla lehet. Ezért egészítettük ki a feltételrendszerünket a negyedik és ötödik egyenltlenséggel.
A matematikai modellben a kapacitásokra vonatkozó egyenltlenségrendszerhez a gyártási folyamat nyereségmaximalizálási igényét kifejez függvény, a célfüggvény társul.
$z = 3x_1 + 5x_2 \to \max$

$$3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

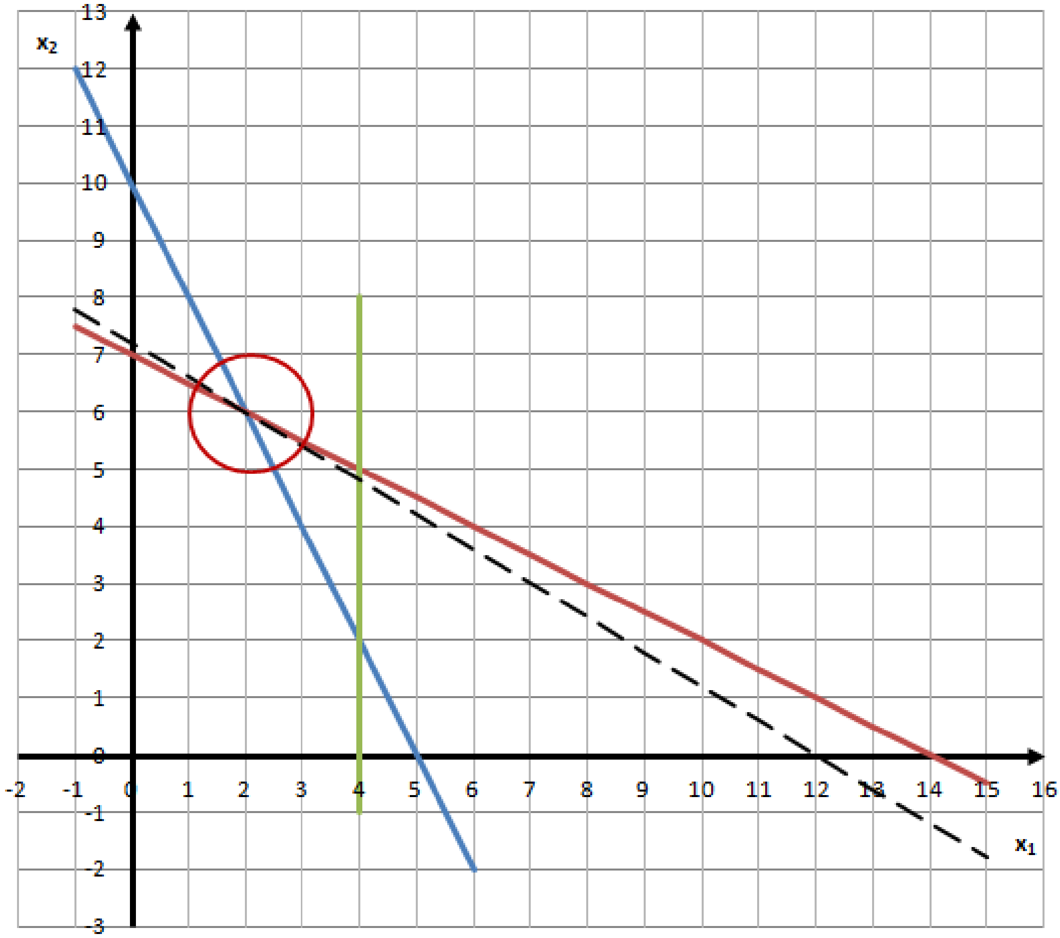
## A Nyílászáró Üzem problémájának grafikus megoldása




Mivel az üzem csak kétféle terméket gyárt, a maximális nyereséget produkáló termékösszetétel meghatározása grafikus módszerrel is lehetséges. A feltételrendszert alkotó egyenltlenségek és a nemnegativitási feltételek együttesen az ábrán látható konvex ötszöget zárják közre. A közbezárt ötszöget a megengedett megoldások tartományának nevezzük, amelyhez az ötszög bels pontjai, az élei és a csúcsai is hozzátartoznak. A megengedett megoldások halmaza elnevezést az indokolja, hogy az összes pontja megfelel az egyenltlenség rendszerben meghatározott feltételeknek.
Lineáris egyenltlenség rendszer által meghatározott tartomány minden esetben konvex, ennek belátását az olvasóra bízzuk.
Ide kívánkozik az a megjegyzés is, hogy egyes lineáris egyenltlenségek nem zárt sokszöget, hanem nyílt tartományt határoznak meg. Egyes lineáris programozási feladatok ezekben az esetekben is megoldhatók, de a nyílt tartomány modellspecifikációs hiányosságokra mutat.
A példánkban szerepl üzem termékösszetételét úgy kell meghatároznunk, hogy a megengedett megoldások tartományába tartozzon, ugyanakkor a maximálisan elérhet nyereséget produkálja.

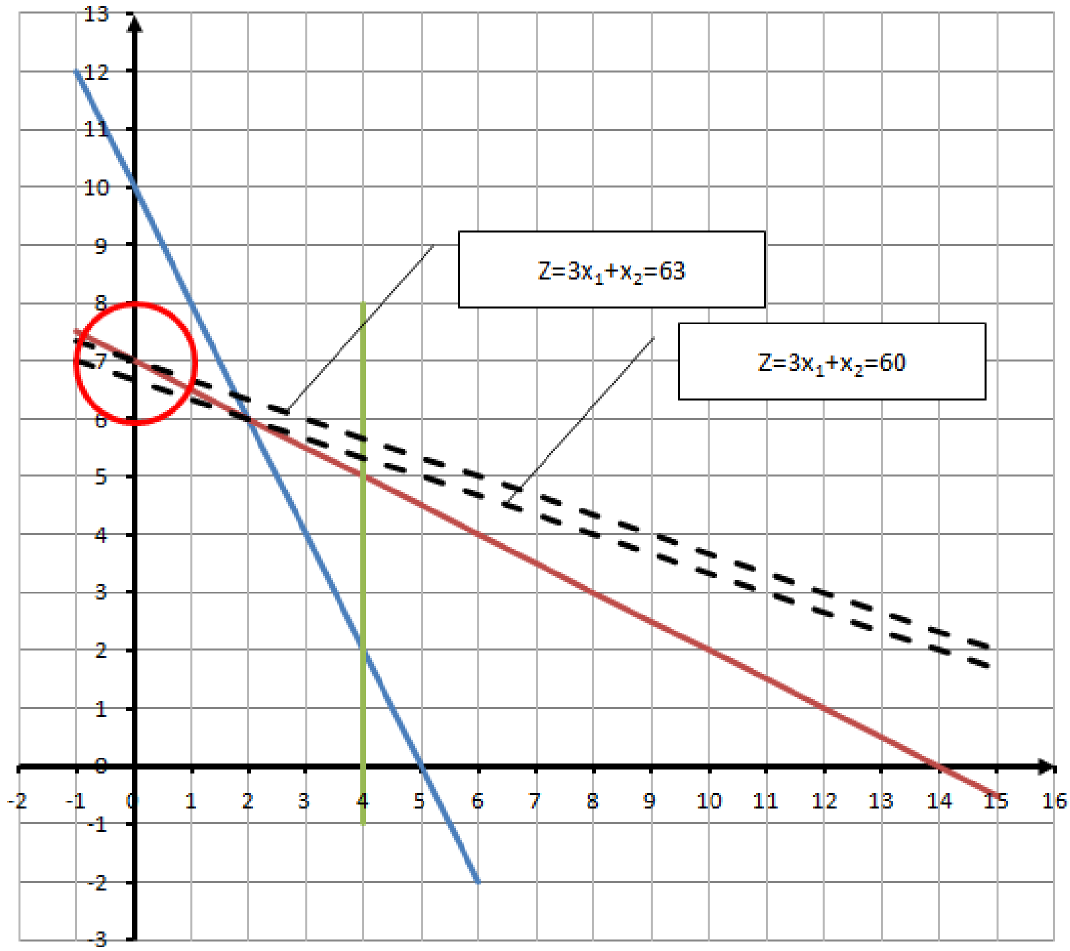



Ha a feladathoz tartozó célfüggvény által felvett értéket önkényesen megválasztjuk, akkor a célfüggvény egy egyenest határoz meg. Ez az egyenes a megengedett tartományunkat ábrázoló koordináta rendszerben megjeleníthet (lásd az ábrát). A nyereséget próbálkozással egyre nagyobb értéknek választva a célfüggvény növekv értékeit reprezentáló több egymással párhuzamos egyenest rajzolhatunk az ábrára. Azt az egyenest kell kiválasztanunk, amelyik még metszi a megengedett megoldásokat tartalmazó tartományt és egyben a legmagasabb célfüggvény-értéket szolgáltatja.




A fenti ábráról leolvasható a Nyílászáró Üzem problémájának optimális megoldása. Azt ajánljuk a Nyílászáró Üzem igazgatóságának, hogy erfrrásaikat úgy használják fel, hogy napi két ajtót és hat ablakot gyártsanak. Ezzel a megoldással napi 2*3 ezer+6*5 ezer=36 ezer Forint nyereséget tudnak elérni.

Azonban a következ negyedéver megváltozik a helyzet. Az ablakokon elért nyereség 5 ezer Forintról 9 ezerre növekszik. Ez jelents változás. A korábbi körülmények között maximális nyereséget biztosító termékösszetételt felül kell vizsgálni.




A két ajtóból és hat ablakból álló napi termelés is megnövekedett nyereséggel jár. A korábbi 36 ezer Forintról 60 ezerre emelkedik. De van még ennél is kedvezbb termékösszetétel. A fenti ábrán világosan láthatjuk, hogy az ablak nyereségtartalmának növekedése maga után vonta, hogy a 2 ajtó, hat ablak már nem az optimális megoldást adja. A megengedett megoldások között találunk jobbat is. Magasabb a nyereség, ha a vállalat egyáltalán nem gyárt ajót, hanem az erforrásait koncentrálva kizárólag ablakgyártással foglalkozik.

## Gyakorlatok

Az megadott kétváltozós lineáris programozási feladatok esetén végezze a következket:

- Vizsgálja az egyenltlenségrendszerhez tartozó egyenltlenségek egyeneseit!
- Vizsgálja a megengedett megoldások halmazát!
- Döntse el, hogy tartalmaz-e felesleges egyenltlenséget a feltételrendszer!
- Próbálgatással keresse meg a megengedett megoldások közül az optimálist!

Az optimális megoldás kiválasztásához használja az animáció lehetségét!

## *Kétváltozós lineáris programozási feladatok grafikus megoldáshoz:*

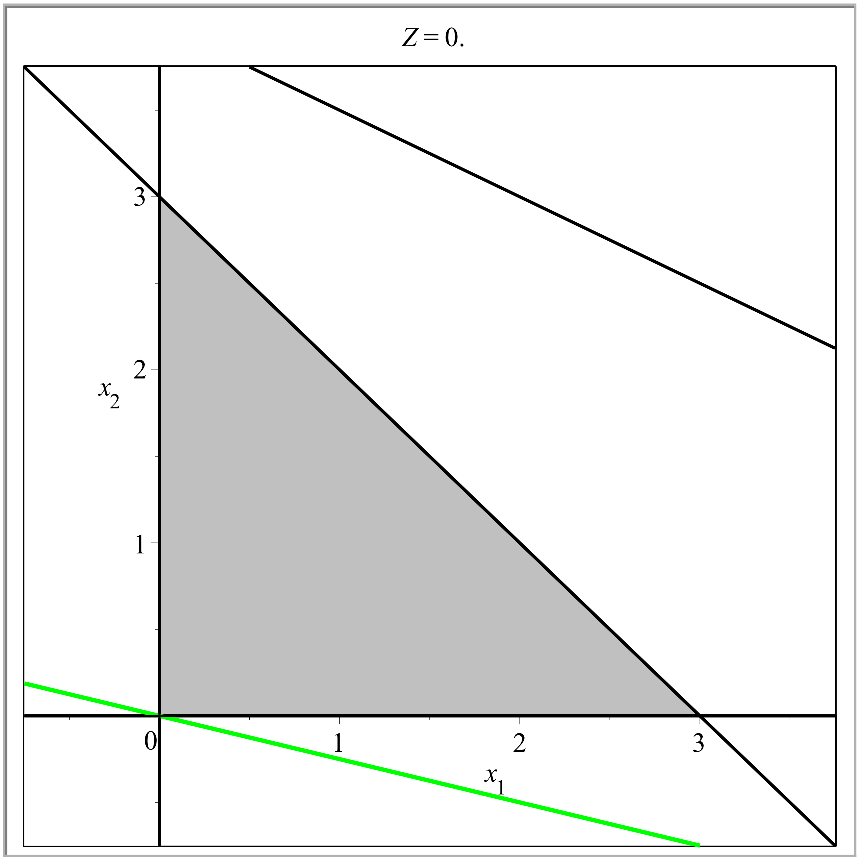
### 1. feladat

$x_1,\ \ x_2\ \ \geq 0$

$x_1 + x_2 \leq 3$

$x_1 + 2x_2 \leq 8$

$z = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$




Start

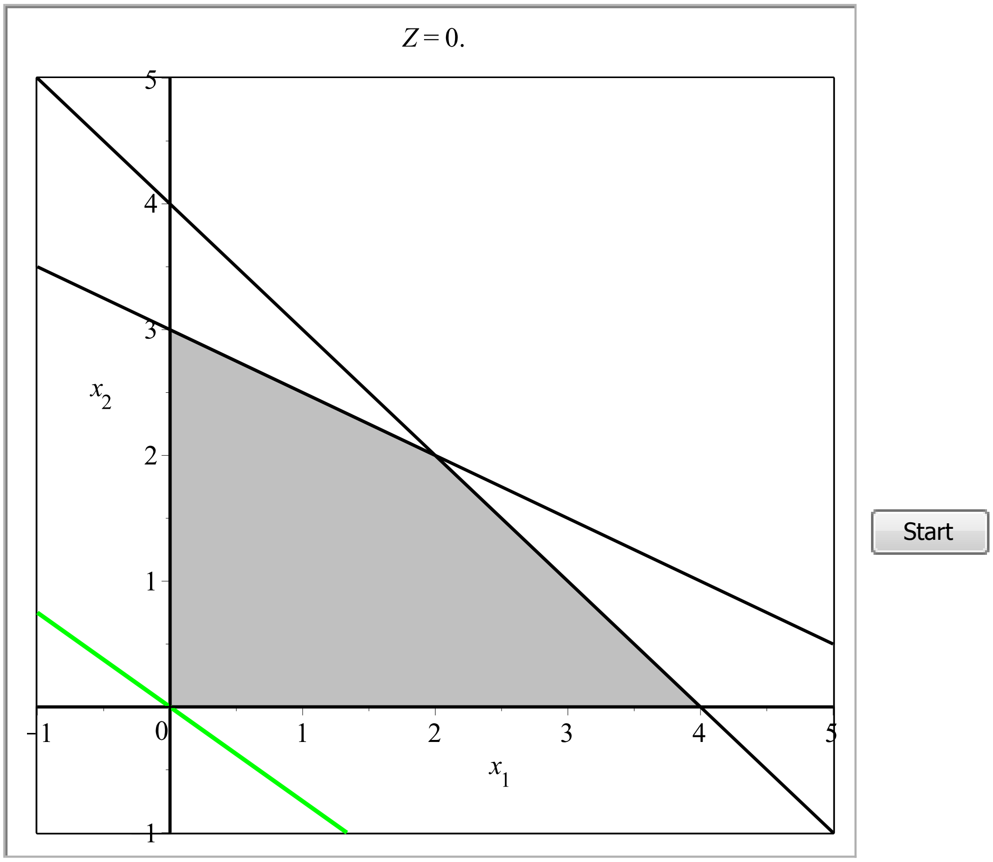
### 2. feladat

$x_1,\ \ x_2\ \ \geq 0$

$x_1 + x_2 \leq 4$

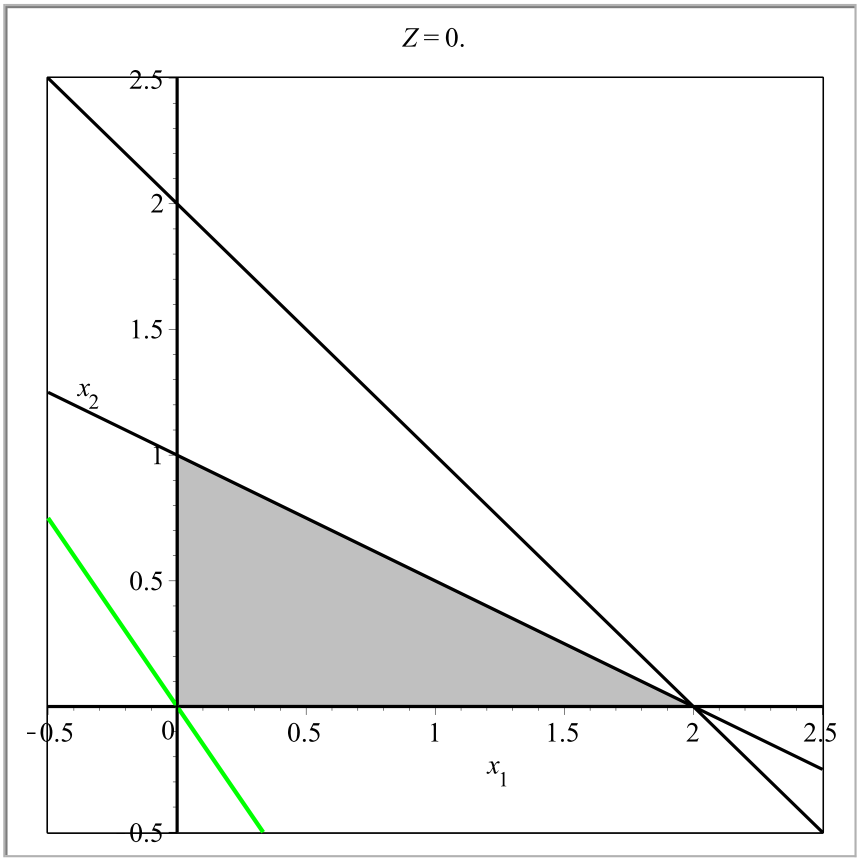
$x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 6$

$z = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \rightarrow \max$




**3. feladat**

$x_1, \quad x_2 \quad \geq 0$
$x_1 + x_2 \leq 2$
$x_1 + 2x_2 \leq 2$
$z = 6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \rightarrow \max$




Start

# A lineáris programozás normálfeladata

Határozzuk meg

$x_1, x_2, \ldots, x_n$

értékeket úgy, hogy maximalizálják a

$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

lineáris célfüggvényt, minözben eleget tesznek a

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_x \le b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_x \le b_2 \\
. \\
. \\
. \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_x \le b_m
\end{array}
$$

lineáris egyenltlenségrendszernek. Mint a bevezet feladatunkban, ismét feltesszük, hogy nemnegatív megoldásokat fogadunk csak el, vagyis

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., n$$

Mátrix és vektor jelöléseket alkalmazva, ahol a mátrixokat és vektorokat félkövér betkkel jelöljük, a következ formulákhoz jutunk:

maximalizálandó □ $z = \boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x},$

feltéve, hogy $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$

ahol $\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$, $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

## *Az elzekben ismertetett lineáris programozási feladat elméleti hátterének rövid összefoglalója*

Amennyiben az $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ vektor eleget tesz az $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ feltételeknek, akkor **x** a lineáris programozási feladat megengedett megoldása. A megengedett megoldások a megengedett megoldások halmazának (L) az elemei. További igazolás nélkül fogadjuk el, hogy a megengedett megoldások nem üres halmaza konvex halmaz. A megengedett megoldások közül optimálisnak nevezzük azokat, melyekre $\boldsymbol{c}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}$ maximális (z célfüggvény).

A megengedett megoldások halmazának véges sok csúcspontja van. Amennyiben létezik a megengedett megoldások halmazának olyan **x** eleme, amelyre a z célfüggvény felveszi a maximumát, akkor a csúcspontok közül is legalább egyben felveszi.
A fenti megállapítások következménye, hogy a lineáris programozási feladat optimális megoldását a megengedett megoldások halmazának véges sok csúcspontjaiban célszer keresni.

Megjegyezhetjük, hogy a gyakorlatból származó feladatok esetén a feltételeket alkotó egyenltlenségek magas száma miatt a véges sok csúcspont darabszáma olyan sok lehet, hogy egyenkénti vizsgálatuk indokolatlanul nagy számítástechnikai teljesítményt kötne le.

## *A lineáris programozás normálfeladatának algebrai megoldása*

A normálfeladat feltételrendszere egyenltlenségrendszer, $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$, és $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Az egyenltlenségrendszer megoldását egyenletrendszer megoldására vezetjük vissza. Az egyenltlenségeket új változók, ún. eltérésváltozók bevezetésével egyenlségekké egészítjük ki. Minden egyenltlenség egy új változóval egészül ki.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_x + u_1 \qquad = b_1$$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n_x}x_x + \quad u_2 \quad = b_2$

.

.

.

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn_x}x_x + \quad u_m = b_m$

Mátrixok, vektorok használatával a fenti egyenltlenségrendszer a következ egyszer alakot ölti:

$$\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Eu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

Az **Ax=b** alakú egyenletrendszerek általános megoldását a szükséges megoldási lépések végrehajtása után a következ formában kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ -\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \boldsymbol{x_2}$$

Ahol $\boldsymbol{x_2} = \mathbf{0}$ választás mellett egy lehetséges bázismegoldást kapunk. $\begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Annyi különféle bázismegoldása van az egyenletrendszernek, ahányféleképp az együttható mátrix oszlopvektorainak bázisát el tudjuk állítani. Ha egy bázismegoldást már elállítottunk, a továbbiakat elemi bázis transzformációkkal állíthatjuk el.
A lineáris programozási feladat megoldása – induló táblázat
A normálfeladatot az alábbi táblázatos elrendezésben reprezentálhatjuk.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\boldsymbol{x}^T$ | $\boldsymbol{u}^T$ | |
| *bázis* | $\boldsymbol{A}$ | $\boldsymbol{E}$ | $\boldsymbol{b}$ |
| | $\boldsymbol{c}^T$ | $\mathbf{0}^T$ | |

Az induló táblázat bázisa az egységvektorokból képzett bázis. Ez a bázis azonos az együttható mátrix (**A**) új oszlopvektoraiból – melyek az új változók (**u**) bevezetése után keletkeztek - képzett bázissal. Ezért az induló táblázat egyszerbb formában is felírható, ha az **u** vektorokat a bázisba vontuk.

| 0. | $\boldsymbol{x}^T$ | |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{u}$ | $\boldsymbol{A}$ | $\boldsymbol{b}$ |

$\left| \; \boldsymbol{c}^{T} \quad \right|$

# A normál feladat megoldása – a szimplex módszer

A lineáris programozási feladat megoldására Dantzig dolgozta ki a szimplex módszert.
Az induló táblázatban található egyenletrendszer általános megoldása az elzek szerint:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

A bázismegoldás ebbl, ha **x=0** választással élünk: **u=b, x=0.**

Idézzük fel, hogy a maximalizálandó célfüggvény $z = \boldsymbol{c}^{T}\boldsymbol{x}$. Az induló táblázatból leolvasható induló bázismegoldás **x=0**. A célfüggvény könnyen kiszámítható értéke z=0. Arra számíthatunk a gyakorlati feladatok többségében, hogy a célfüggvény maximális értéke nem zérus, az optimális megoldás az induló megoldástól különböz.
A további bázismegoldások mindegyikének elállítása, majd az optimális bázismegoldás kiválasztása kézenfekvnek tnik, de a bázismegoldások száma a gyakorlati esetekben elfogadhatatlanul magas számítástechnikai teljesítményt igényel. A szimplex módszer egy hatékony, költségtakarékos metódus az optimális bázismegoldás kiválasztására.

A szimplex módszer a normálfeladat egy bázismegoldásából, rendszerint az **x=0** megoldásból kiindulva iteratív lépésenként egy olyan másik bázismegoldásra lép, amelyhez tartozó célfüggvény-érték magasabb, mint az elz. Az optimális megoldást akkor találtuk meg, ha a módszer magasabb célfüggvény-érték további bázismegoldást nem kínál fel. A szimplex módszer egyes lépéseit az induló táblázatból egymás után generált táblázatokon keresztül követhetjük. A táblázatokat szimplex táblázatnak is nevezhetjük.

A szimplex módszer lépései

1.  Az induló táblázatból bázismegoldást olvasunk le. Megállapítjuk a célfüggvény értékét.
2.  Ha lehetséges, akkor a célfüggvény értékének növelése érdekében az A együttható mátrix további oszlopvektorát bevonjuk a bázisba.
3.  A báziscserét követen másik bázismegoldást olvasunk le. Megállapítjuk a célfüggvény értékét.
4.  Ha a célfüggvény értéke nem növelhet, akkor megtaláltuk az optimális megoldást.

Hogyan dönthetjük el, hogy az induló, vagy a további táblázatokból leolvasható bázismegoldáshoz tartozó célfüggvény értéke növelhet, vagy nem?
A maximalizálandó célfüggvény $z = \boldsymbol{c}^{T}\boldsymbol{x}$, vagy részleteiben $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$. Az induló táblázatból leolvasható **x=0** bázismegoldás esetében nyilvánvalóan zérus a kiszámítható értéke. Akkor van esélyünk növelni a célfüggvény értékét, ha az együttható mátrix(**A**) oszlopvektorai közül olyat vonunk a bázisba, amelyhez tartozó $c_i$ célfüggvény együttható pozitív. A pozitív érték, mint szükségesség érthet, hiszen az **x≥0** követelményt már korábban megfogalmaztuk.

## *Példa a szimplex módszer alkalmazására - kétváltozós, grafikusan is megoldható eset*

Oldjuk meg a A Nyílászáró Üzem ajtók és ablakok optimalizálási feladatát, amit a bevezten elmlítetünk!

$$8 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 40,$$
$$3 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 42,$$
$$x_1 \le 4$$

Mivel ajtó és ablakok gyártásáról szól a modell, ezért fel kell tennünk azt is, hogy $x_1$ és $x_2$ csak pozitív, vagy nulla lehet. Ezt a két feltételt a megoldás lépései során tudatosan ki fogjuk használni.
A matematikai modellben a kapacitásokra vonatkozó egyenltlenségrendszerhez a gyártási folyamat nyereségmaximalizálási igényét kifejez függvény, a célfüggvény társul.

$z = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \rightarrow \max$

$$3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

### *A feladatmegoldás lépésenként*

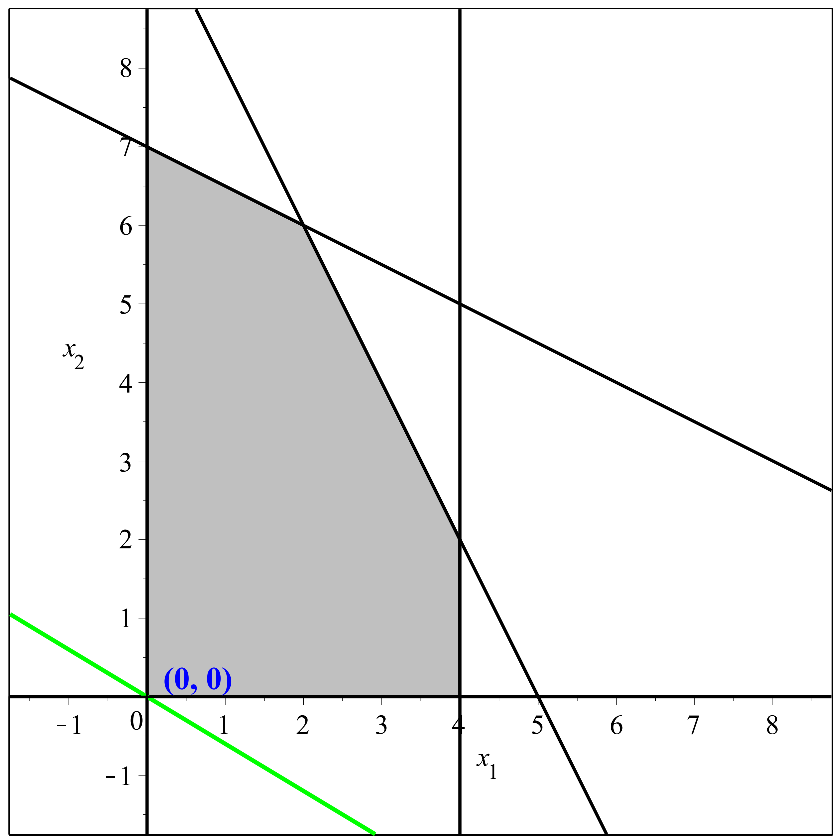
A feladat induló táblázatát, a 0. táblázatot a korábbiaknak megfelelen állítottuk össze. Az induló táblázatunk nem optimális megoldást tartalmaz. Ezt azért állíthatjuk, mert $x_1$ és $x_2$ oszlopokban egyaránt pozitív a célfüggvény eggyütthatója. Azt jelzi számunkra, hogy a célfüggvény jelenlegi 0 értéke növelhet. A célfüggvéy értéke a szimplex táblázat jobb alsó sarkában jelenik meg. Mivel $x_1$ és $x_2$ értékei az induló táblázatban egyaránt zérusok, a jobb alsó sarokba nullát írunk.
Az induló táblázatunk $x_1$ és $x_2$ változók zérus értékét úgy jelzi, hogy az együttható mátrix(**A**) hozzájuk tartozó oszlopvektorai a bázisban nem szerepelnek.
A megoldási folyamat grafikus szemléltetésében ezt úgy ábrázoljuk, hogy a célfüggvény egyenese az origón halad keresztül.

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & b \\ u_1 & 8 & 4 & 40 \\ u_2 & 3 & 6 & 42 \\ u_3 & 1 & 0 & 4 \\ -z & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

"a megoldás nem optimális"

$x_1 = 0, x_2 = 0$

"célfüggvény:"$[z = 0]$




A szimplex módszer lépéseit követve tehát megvizsgáljuk, hogy a táblázat az optimális megoldást tartalmazza-e. Mint láttuk nem, ezért javítanunk kell a megoldáson. Javított megoldáshoz úgy jutunk, ha $x_1$ és $x_2$ változók közül valamelyiket bevonjuk a megoldásba, azaz az egyik terméket gyártani kezdjük. A szimplex módszer nem tartalmaz utsítást arra, hogy melyik változót részesítsük elnyben. Jelen példában vonjuk be a megoldása az $x_1$ változót. A változó bevonása a megoldásba együtt jár valamely, a megoldásban már szerepl változó kikerülésével. Els lépésként az $x_1$ és $u_3$ cserét végezzük el. A számítások részleteit illeten a lineáris algebra tanulmányok megfelel fejezeteire utalhatunk. A késbbiekben összefoglaljuk a szükséges számítások apró részleteit, jelenleg azonban a feladatunk megoldásának javítását tartjuk szem eltt, vagyis a célfüggvény egyenesét (zöld színnel jelölve) szeretnénk minél távolabbra tudni az origótól.

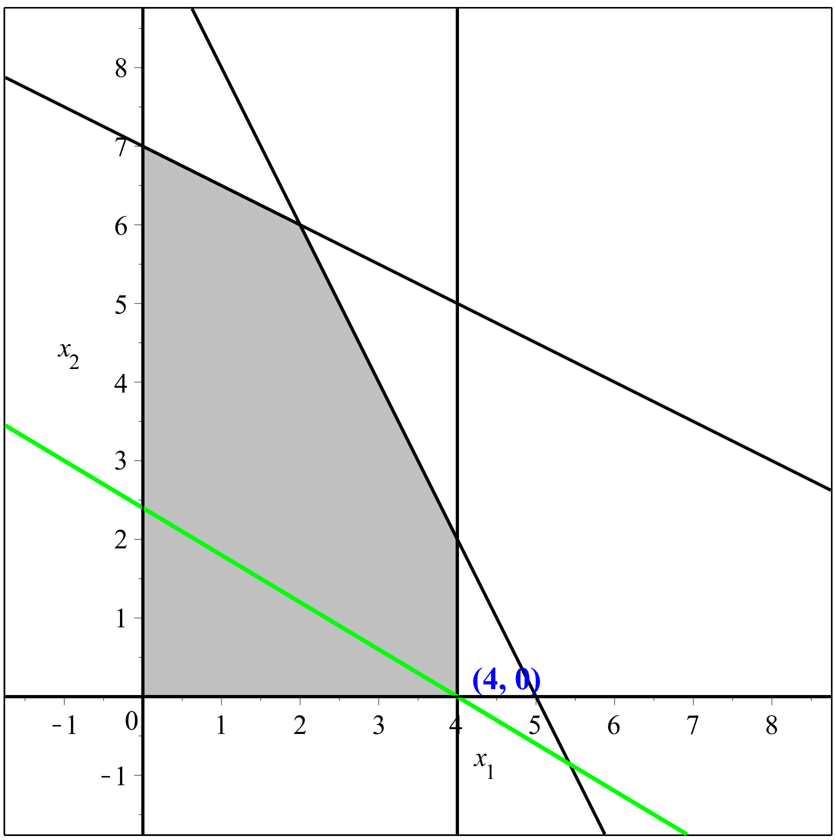
Az ajtó termék bevonását ($x_1$) követen kapjuk a feladatunk els szimplex tábálázatát. A megoldás jobb, mint a korábbi. A célfüggvény értéke 12, (potosabban 12 ezer Forintnyi nyereség), $x_1$=4 ajtót kell gyártanunk. De ez a megoldás sem optimális. A vállalat nyeresége növelhet. $x_2$ oszlopában a célfüggvéy együtthatója pozitív 5. A nyereség növelhet, a termelési programba be kell vonni az ablakokat is.

$$\begin{bmatrix} 1 & u_3 & x_2 & b \\ u_1 & -8 & 4 & 8 \\ u_2 & -3 & 6 & 30 \\ x_1 & 1 & 0 & 4 \\ -z & -3 & 5 & -12 \end{bmatrix}$$

"a megoldás nem optimális"

$x_1 = 4, x_2 = 0$

"célfüggvény:"$(z = 12)$



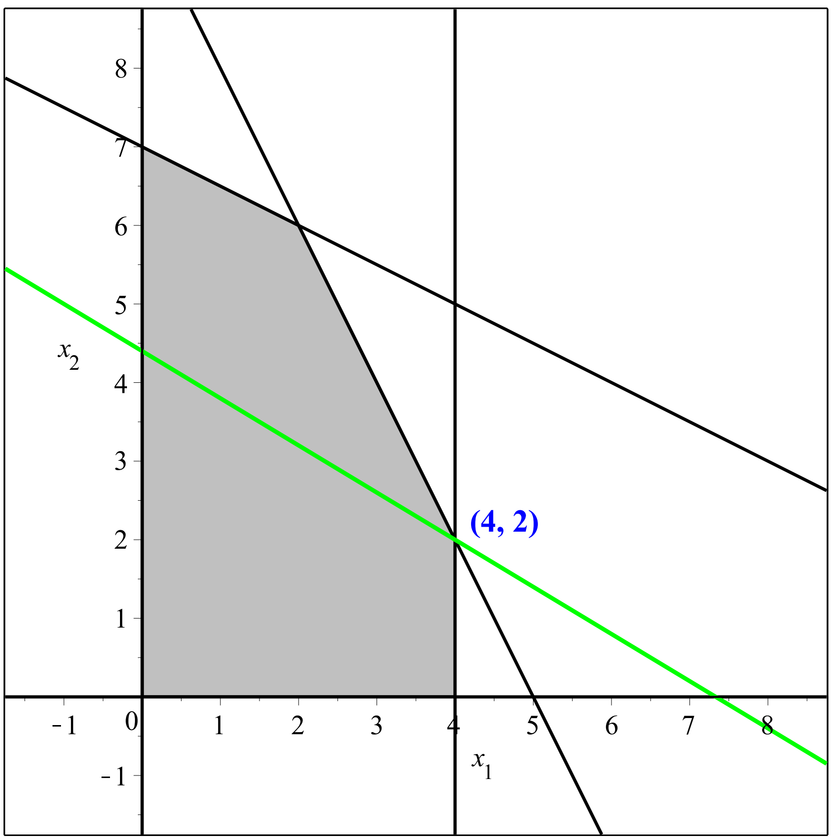

Bevontuk az ablakokat is a termelésbe. A célfüggvényünk értke, vagyis a vállalati nyereség 12 ezer Forintról 22 ezerre növekedett. Jegyezzük meg, hogy a szimplex táblában a célfüggvény értékét ellentétes eljellel találjuk meg. Mindkét terméket gyártjuk a táblázat szerint. $x_1$ =4 ajtó, $x_2$ =2 ablak. A megoldásunk nem optimális. Ennél kedvezbb megoldásunk is lehet. Pozitív értéket találun -z sorában.

$$\begin{bmatrix} 2 & u_3 & u_1 & b \\ x_2 & -2 & \frac{1}{4} & 2 \\ u_2 & 9 & -\frac{3}{2} & 18 \\ x_1 & 1 & 0 & 4 \\ -z & 7 & -\frac{5}{4} & -22 \end{bmatrix}$$

"a megoldás nem optimális"

$x_1 = 4, x_2 = 2$

"célfüggvény:"$[z = 22]$



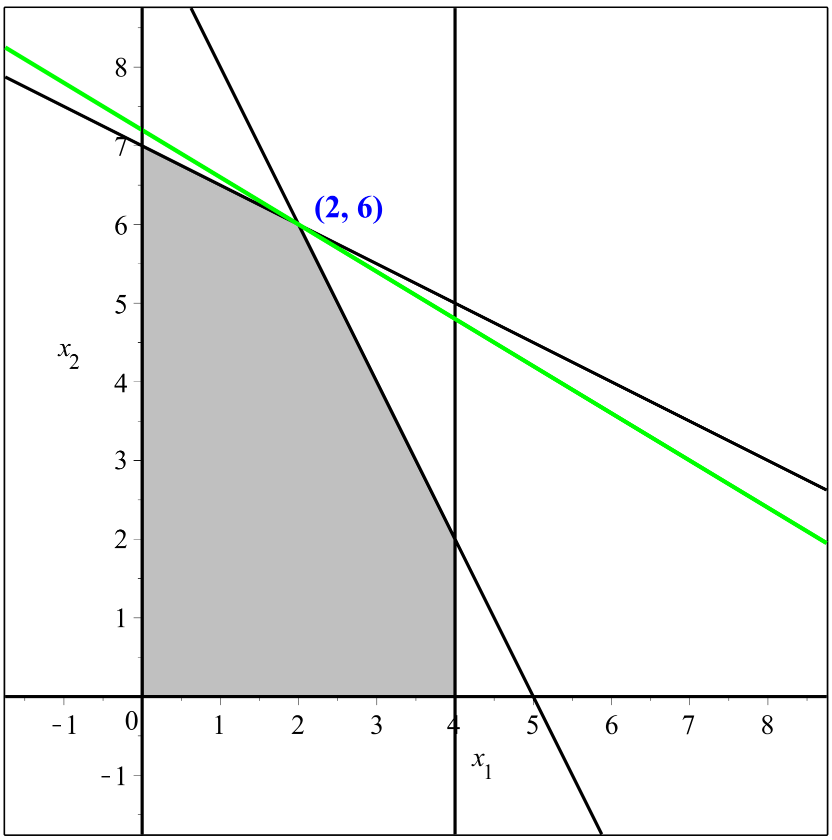

Találhatunk kedvezbb megoldást. A szimlex módszer garantálja, hogy a legkedvezbb megoldást megtaláljuk. $u_2$ és $u_3$ cseréjével javítunk a termékösszetételünkön. A vállalati nyereség ezek után 36 ezer Forint. Két ajtót és hat ablakot kell gyártatnunk.

$$\begin{bmatrix} 3 & u_2 & u_1 & b \\ x_2 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{12} & 6 \\ u_3 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{6} & 2 \\ x_1 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{6} & 2 \\ -z & -\frac{7}{9} & -\frac{1}{12} & -36 \end{bmatrix}$$

"a megoldás optimális"

$x_1 = 2, x_2 = 6$

"célfüggvény:"$(z = 36)$




***Példa a szimplex módszer alkalmazására 3 változós, grafikusan is szemléltethet eset.***

Legyen a megoldandó feladatunk (**x≥0**) és $z = \rightarrow$ max *célfüggvény mellett.*

Feltételrendszer:

$x_1 + x_2 \le 4,$
$x_2 + x_3 \le 4,$
$x_1 + x_2 + x_3 \le 6$

Maximalizálandó célfügvény:

$x_1 + x_3$

▶ ***A feladatmegoldás lépésenként***

# A bázis-transzformáció

Normálfeladat egymást követ bázismegoldásainak elállítására használt bázis-transzformáció lépéseit foglaljuk össze. A lineáris algebra megfelelel fejezeteit ajánljuk további tanulmányozásra az érdekld olvasó számára.

A báziscsere-transzformáció során az A együtthatómátrix oszlopvektorait reprezentáló bázis egy elemét cseréljük ki egy, a bázisban nem szerepl másik oszlopvektorra. A szimplex táblázatban használt jelölések az oszlopvektorokat az egyes változókkal azonosítják, a továbbiakban mi is a változók cseréjével fogunk a bázisvektorok cseréjére hivatkozni.
A bázis-transzformációt a fenti példa 1. táblázatán szemléltetjük. A harmadik oszlopvektort a bázisba vonjuk, miközben a bázisból kikerül az eddig ott szerepl $e_3$ egységvektor. A bázismegoldásban szerepl változók $(x_3 \leftrightarrow u_3)$ cseréjével jelölhetjük a mveletet. A két változó sorának, oszlopának keresztezésénél jelölt mátrix elemet (1) generáló elemnek nevezzük.

$$\begin{bmatrix} 1 & u_1 & x_2 & x_3 & b \\ x_1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ u_2 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ u_3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -z & -1 & -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

# A bázis-transzformáció lépései

**1. lépés:** Az új táblázatban a generáló elem helyére a generáló elem reciproka kerül.
**2. lépés:** Az új táblázatban a generáló elem sorába kerül többi elem kiszámításához osszuk el a generáló elem sorában található eredeti értékeket a generáló elemmel.
**3. lépés:** Az új táblázatban a generáló elem oszlopába kerül többi elem kiszámításához osszuk el a generáló elem oszlopában található eredeti értékeket a generáló elemmel, majd a hányadost szorozzuk meg -1-gyel.
**4. lépés:** Az új táblázat többi sorában a hiányzó értékek kiszámítását a következképp végezzük: A eredeti értékbl levonjuk a generáló elem eredeti oszlopában található érték és a generáló elem új sorában található érték szorzatát.

**Megjegyzés**: Az 1. lépésbl nyilvánvaló, hogy csak olyan bázicsere hajtható végre, ahol a megfelel változók keresztezésénél nem nulla elem található. Vagyis a generáló elem nem lehet nulla.

# A generáló elem kiválasztásának további szempontjai

Emlékeztetünk arra, hogy a lineáris programozás normálfeladatát a következképp fogalmaztuk meg:

maximalizálandó $z = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$,
feltéve, hogy **Ax≤b, x≥0, b≥0.**

A megoldás során egyenletrendszerre vezettük vissza a feladatot.

$$\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Eu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

A bevezetett eltérésváltozókra (**u**) a fentiekből közvetlenül következik, hogy – hasonlóan az eredeti változókhoz (**x**) az értékük csak nem negatív lehet. **x≥0, u≥0** követelmény az összes elállított bázismegoldás esetén. Röviden, a szimplex táblázat utolsó oszlopába nem kerülhet negatív érték, mert a bázismegoldáshoz tartozó értékek ott találhatók.

A generáló elem megválasztásához két következménnyel járul hozzá a fenti gondolatmenet.

**1. következmény**: A generáló elem nem lehet negatív. Ebben az esetben ugyanis az új táblázatban a generáló elem sorában az utolsó oszlopba az osztás eredményeként negatív érték adódna.

**2. következmény**: A generáló elemet az ún. „szűk keresztmetszet" alapján kell megválasztani. Az új táblázat utolsó oszlopába a többi sorban sem eredményezhet negatív értéket a bázis-transzformáció végrehajtása. A generáló elem kiválasztásáról korábban már láttuk, hogy pozitív célfüggvény-együtthatójú változót kell a bázisba vonni. A pozitív célfüggvény-együtthatójú oszlopból választunk pozitív generáló elemet. Ha több jelölt is szóba jöhet, a „szűk keresztmetszet" elvét akkor követjük, ha **b** oszlopban található érték és a generálóelem-jelölt hányadosok közül a legkisebbet választjuk.

További kérdésként merülhet fel, ha a célfüggvény együtthatói között több pozitív is található, ez hogyan befolyásolja a generáló elem kiválasztását? Az elzekben ismertetett szimplex módszer biztosítja, hogy minden egyes lépés növeli a maximalizálandó célfüggvény értékét, végül az optimális bázis megoldáshoz jutunk. A szükséges lépések száma csak az optimalizációs folyamat befejezésekor derül ki. Nem lehet elzetes kritériumot megfogalmazni arra nézve, hogy melyik változó érdemes a bázisba vonni az adott lépés során.

## Normál feladat megoldása – alternatív megoldások

A lineáris programozási feladatoknak gyakran több különböz optimális megoldása van, melyek azonos célfüggvény értéket szolgáltatnak. A normál feladat megoldása során alternatív megoldás létezésére utal az, ha az utolsó, az optimális bázismegoldást tartalmazó szimplex táblázat célfüggvény sorában zérus együtthatót, esetleg többet is találunk. Láttuk, hogy pozitív célfüggvény-együttható „fölül" választva generáló elemet a megoldáson javítani tudunk. Nulla érték fölött választva pedig alternatív megoldáshoz jutunk.

Tekintsük a korábban kidolgozott feladatunk 2., utolsó szimplex táblázatát. A célfüggvény sorában az $u_1$ oszlopában nulla található. Hajtsuk végre az $u_2 \leftrightarrow u_1$ cserét!

$$\begin{bmatrix} 2 & u_1 & x_2 & u_3 & b \\ x_1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ u_2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ x_3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -z & 0 & -1 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & u_2 & x_2 & u_3 & b \\ x_1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ u_1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ x_3 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ -z & 0 & -1 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

Az 3. táblázatból leolvasható alternatív bázismegoldás:

$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 4,\ u_1 = 2,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0.$

A $z = x_1 + x_2$ célfüggvény kiszámítható értéke 6. Megfigyelhetjük, hogy a célfüggvény értékét ellenkez eljellel a szimplex táblázat jobb alsó cellájában megtalálhatjuk.

## Normál feladat megoldása – degeneráció

A fent ismertetett szimplex módszer iteratív módszer. Arra a feltevésre alapoztunk, hogy minden egyes lépésben olyan bázismegoldást állítunk el, amivel javítani tudjuk a célfüggvény értékét.
A gyakorlatban ritkán, de elfordul olyan eset, amikor az iteratív szimplex módszer végtelen ciklusban ismétli az egymást követ szimplex táblázatokat. A degeneráció létére az utal, ha a táblázat utolsó oszlopában 0 jelenik meg, vagyis valamely x változó 0 értéket kap bázismegoldásként. Ha a generáló elem kiválasztásakor ismertetett „szűk keresztmetszet” elv alkalmazása során több azonos „szűk keresztmetszet”-nek megfelelő generáló elem jelölt is szóba jöhet, akkor kell degenerációra számítani. A kézi megoldás esetén felismerhetjük a ciklikusságot. A ciklikusságot azzal törhetjük meg, ha a „másik” generáló elemet választjuk. A számítógépes programokba automatikus degeneráció felismer automatizmusokat építenek.

## Amikor a normál feladatnak nincs megoldása

Ha a megengedett megoldások halmaza nyitott, akkor elállhat az az eset, hogy a célfüggvény minden határon túl növekedjen. Vagyis célfüggvény nem korlátos. A gyakorlatból származó esetekben ez a feladat specifikációjában elkövetett hibákból adódik. A generáló elem kiválasztását nem tudjuk megoldani ebben az esetben, mert bár a célfüggvény sorába találunk pozitív értéket, vagyis növelhet a célfüggvény, de pozitív generáló elem jelölt nem található fölötte.

Legyen a megoldandó feladatunk (**x≥0**) és $z = \rightarrow$ max

Feltételrendszer:

$$3x_1 - x_2 + x_4 \le 20,$$
$$-x_1 + x_2 - 2x_3 \le 0,$$
$$x_1 \le 10,$$
$$x_4 \le 8$$

Maximalizálandó célfügvény:

$$x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3$$

### *A feladatmegoldás lépésenként*

A normálfeladat induló táblázatát az elzekben megismert módon állítjuk össze.

Az induló táblázatból leolvasható bázismegoldás:

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, u_1 = 20, u_2 = 0, u_3 = 10, u_4 = 8.$

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ u_1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 20 \\ u_2 & -1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ u_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ -z & 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

"a megoldás nem optimális"

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$

"célfüggvény:" $(z = 0)$ **(1)**

A megoldás nem optimális, a z célfüggvény sorában pozitív elemeket találhatunk, melyek a célfüggvény értékének növelhetségére utalnak. Generáló-elemet kell választanunk az egyik pozitív érték fölül, a generáló-elem legyen pozitív, feleljen meg a „szűk keresztmetszet” elvének. $x_1$ oszlopában választva a „szűk keresztmetszet” elvet követve számítjuk $\frac{20}{3}$ illetve $\frac{10}{1}$. A generáló-elem a 3, mert a $\frac{20}{3}$ kisebb. A generáló-elemet jelöljük.

A bázis-transzformáció elvégzése után:

Az 1. táblázatból leolvasható bázismegoldás:

$x_1 = \frac{20}{3}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, u_1 = 0, u_2 = \frac{20}{3}, u_3 = \frac{10}{3}, u_4 = 8$

Bár a célfüggvény értéke növekedett ($z = \frac{20}{3}$), a megoldás nem optimális, a z célfüggvény sorában találunk pozitív elemet, mely a célfüggvény értékének növelhetségére utal. Generáló-elemet kell választanunk a $\frac{10}{3}$ fölött. A generáló-elem legyen pozitív, feleljen meg a „szűk keresztmetszet” elvének. $x_2$ oszlopában a két lehetséges jelöltre számítva a „szűk keresztmetszet” hányadosát azonos értékeket kapunk.  Ez a degeneráció lehetségét vetíti elre. A $\frac{2}{3}$-t jelöljük meg generáló-elemnek.

$$\begin{bmatrix} 1 & u_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ x_1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{20}{3} \\ u_2 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -2 & \frac{1}{3} & \frac{20}{3} \\ u_3 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} \\ u_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ -z & -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{20}{3} \end{bmatrix}$$

"a megoldás nem optimális"

$$x_1 = \frac{20}{3}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$$

$$\text{"célfüggvény:"}\left(z = \frac{20}{3}\right) \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & u_1 & u_2 & x_3 & x_4 & b \\ x_1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 10 \\ x_2 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -3 & \frac{1}{2} & 10 \\ u_3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ -z & -2 & -5 & 9 & -2 & -40 \end{bmatrix}$$

"a megoldás nem optimális"

$$x_1 = 10, x_2 = 10, x_3 = 0, x_4 = 0$$

$$\text{"célfüggvény:"}(z = 40) \tag{3}$$

Az 2. táblázatból leolvasható bázismegoldás:

$x_1 = 10, x_2 = 10, x_3 = 0, x_4 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 8$

Bár a célfüggvény értéke ismét növekedett (z=40), a megoldás nem optimális, a z célfüggvény sorában találunk pozitív elemet, mely a célfüggvény értékének növelhetségére utal. Generáló-elemet kell választanunk a 9 fölött. A generáló-elemet megjelöljük. A bázis-transzformációt követen a 3. táblázatot kapjuk.

$$\begin{bmatrix} 3 & u_1 & u_2 & u_3 & x_4 & b \\ x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ x_2 & -1 & 0 & 3 & -1 & 10 \\ x_3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ u_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ -z & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -9 & \frac{5}{2} & -40 \end{bmatrix}$$

"a megoldás nem optimális"

$x_1 = 10, x_2 = 10, x_3 = 0, x_4 = 0$

"célfüggvény:"$(z = 40)$ **(4)**

A 3. táblázatból leolvasható bázismegoldás:

$x_1 = 10, x_2 = 10, x_3 = 0, x_4 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 8$

A célfüggvény értéke ezúttal nem növekedett (z=40), a megoldás nem optimális, a z célfüggvény sorában találunk pozitív elemet, mely a célfüggvény értékének növelhetségére utal. Generáló-elemet kell választanunk az $\frac{5}{2}$ fölött. A generáló-elemet megjelöljük. A bázis-transzformációt követen a 4. táblázatot kapjuk.

$$\begin{bmatrix} 4 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & b \\ x_1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ x_2 & -1 & 0 & 3 & 1 & 18 \\ x_3 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 4 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ -z & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -9 & -\frac{5}{2} & -60 \end{bmatrix}$$

"a megoldás nem optimális"

$x_1 = 10, x_2 = 18, x_3 = 4, x_4 = 8$

"célfüggvény:"$(z = 60)$ **(5)**

A 4. táblázatból leolvasható bázismegoldás:

$x_1 = 10, x_2 = 18, x_3 = 4, x_4 = 8, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 0$

A célfüggvény értéke ezúttal növekedett (z=60), a megoldás nem optimális, a z célfüggvény sorában találunk pozitív elemet, mely a célfüggvény értékének növelhetségére utal. Generáló-elemet kell választanunk az $\frac{5}{2}$ fölött. A generáló-elemet csak pozitív értékek közül választhatjuk ki, de $u_1$ oszlopában pozitív érték nincs. Generáló-elem kijelölése nem lehetséges. A feladat optimális megoldását nem tudjuk megállapítani. A szimplex táblázattunk arra utal, hogy a feltételrendszer által meghatározott tartomány, amely a megengedett megoldásokat tartalmazza nem zárt, a célfüggvényünk a nyílt tartományon nem korlátos.

A feladat nem megoldható.

# Útmutató az interaktív gyakorlófelület használatához

A fejezethez tartozó interaktív gyakorlófelület két szekcióra tagozódik. Az els részben a megoldásra javasolt, felkínált feladatok közül választhatunk, az második részben gépelhetünk be önállóan feladatot.

**Választás a javasolt feladatok közül**

A megoldásra javasolt feladatok közül úgy választhatunk, ha a legördül feladatlista egyik elemét egérkattintással kijelöljük


A kattintást követen a feladat feltételrendszere és a célfüggvény megjelenik a megfelel kifejezésmezkben.

Feltételrendszer:

$x_1 + 2\,x_2 + 8\,x_3 \le 100,$
$2\,x_2 + x_3 \le 80,$
$x_1 + x_2 + x_3 \le 50$

Maximalizálandó célfüggv

$2\,x_1 + x_2 + 3\,x_3$

**Normálfeladat önálló megadása**

Feltételrendszer:

$x_1 + 2\cdot x_2 + 8\cdot x_3 \le 10,$
$2\cdot x_2 + 5\cdot x_3 \le 80,$
$x_1 + x_2 + 3\cdot x_3 \le 50$

A normálfeladat feltételeit a "Feltételrendszer:" feliratú kifejezésmezben adjuk meg. Az ismeretleneket jelölhetjük indexelt szimbólumokkal, mint például $x_1, x_2$ *stb*., vagy jelölhetjük mindegyiket más-más betvel, mint $x, y, v, w$ *stb*. Nem kötelez minden feltételben minden változót szerepeltetni. Az eltérésváltozókra a program minden esetben $u_1, u_2$ *stb*. jelölést fogja alkalmazni, ezért tekintsünk el ezek használatától a feltételrendszer megadásakor.
Tegyük fel, hogy szeretnénk a $x_1 + 2\cdot x_2 \le 10$ képletet begépelni.
Az indexelt ismeretlenek megadásához kövessük a billentyzet használatának a következ módját:

"x" "_" "1""→""2""*""x""_""2""→""<""=""1""0",

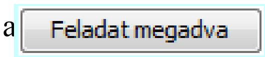
Ahol idézjelek közé zárva soroltuk fel az egymást követ billenytket. Figyeljük meg, hogy az "aláhúzás" szimbólum kezdeményezi az alsó indexmezbe való belépést, majd az index megadását követen a jobbra mutató nyíl billenty leütésével léphetünk ki az indexmezbl. A szorzást nem kötelez a "*" szimbólummal jelölni, akár el is hagyhatjuk. A kisebb-egyenl feltétel megadásához két billenty kombinációjára van szükség.

A megadott feltételek végére kötelez a vessz, az utolsó feltétel végére azonban ne tegyünk.

A feltételrendszerben nem szükséges a $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ *stb*. feltételt explicit módon megadni, ezt a fejezetben szerepl minden feladatra érvényesnek tekintjük.

A célüggvény megadásakor is kövessük a feltételrendszer esetében leírtakat. Nem kell külön jelölést használni a maximalizálandó célfüggvény megadásához, ezt a fejezetben szerepl minden feladatra érvényesnek tekintjük. A célfüggvény képletében olyan változók is szerepelhetnek, melyek a feltételekben nem. A célfüggvény képlete esetén nem szabad semmilyen záró karaktert, szimbólumot sem használni.

$$2 \cdot x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3$$

A feladatmegadást a 

nyomógombra kattintva fejezzük be. A helytelen feladatmegadásra hibaüzenettel figyelmeztet a Maple rendszer, javítsuk a feladatmegadás gépelési hibáit a fent megadott szempontok szerint.

**Megjegyzés**

A normálfeladat interaktív gyakorló modul használatakor ügyeljünk arra, hogy a megadott feladat tegyen eleget a normálfeladatra vonatkozó, a fejezetben szerepl feltételeknek. Vagyis:

maximalizálandó $z = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$,

feltéve, hogy $A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{b} \ge \boldsymbol{0}$

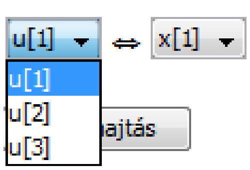
**Az indulótábla létrehozása**

Az interaktív gyakorlófelület két szekciójának használata a továbbiakban megegyezik.
A feladat megadását követen gyakorló modul

- a feltételekbl és a célfüggvénybl kiválasztja az ismeretleneket jelöl szimbólumokat
- elállítja az induló szimplex táblázatot
- az induló táblázatból "kiolvassa" a lehetséges megoldást, és a hozzá tartozó célfüggvény értéket
- megállapítja, hogy optimális-e a megoldás
- grafikusan szemlélteti a feladatot
- a változókat felkínálja további bázscserék végrehajtására.

**A normálfeladat megoldási lépései a gyakorlófelület segítségével**

Amennyiben a szimplex táblázatból leolvasható megoldás nem optimális, akkor további báziscserére van szükség. A báziscserében szerepl két változó kiválasztását olyan legördül menük segítik, melyek tartalma folyamatosan tükrözi a szimplex táblázat tartalmát.




Válasszuk ki a megfelel változókat a cseréhez.

A kiválasztást követen a gyakorló modul értékeli a választásunkat. Például: "a kijelölt elem nem szk keresztmetszet".
Megfelel generáló elem esetében az üzenet:"jó generáló elem".
A báziscsere végrehajtását a Végrehajtás nyomógombbal kezdeményezhetjük.

# Javasolt feladatok

Feltételrendszer:

$x_1 + 2x_2 + 8x_3 \leq 100,$
$2x_2 + x_3 \leq 80,$
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 50$

Maximalizálandó célfüggvény: $z \to \max$

$2x_1 + x_2 + 3x_3$

Válasszon a megoldásra javasolt feladatok közül!

2. feladat

Szimplex táblázat:

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & b \\ u_1 & 1 & 2 & 8 & 100 \\ u_2 & 0 & 2 & 1 & 80 \\ u_3 & 1 & 1 & 1 & 50 \\ -z & 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Eredmények:

$[x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0]$

\`célfüggvény\`: $(z = 0)$

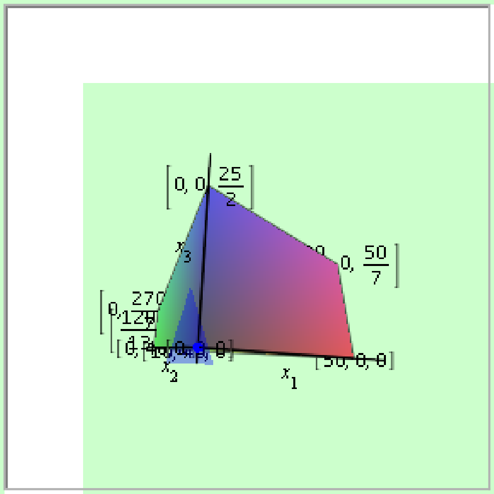
a \`megoldás\` nem \`optimális\`

Báziscsere:

u[1] ⇔ x[1] generáló elem: 1

["a kijelölt elem nem szűk keresztmetszet"]

Végrehajtás




# Önállóan megadott feladatok

Feltételrendszer:

$x_1 + 6 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 \le 100,$
$2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \le 80,$
$x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3 \le 50$

Maximalizálandó célfüggvény: $z \to \max$

$2 \cdot x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3$

Adjon meg önállóan egy normál feladatot!
A feladatmegadást a
"Feladat megadva"
gombra kattintással fejezzük be!

(A megfelel formátum a gyakorló feladatok betöltése után tanulmányozható. Alsó index megadási módja: x_1, majd jobb nyíl billenyt. Az egyes feltételeket vessz választja el. Az utolsó feltétel után vesszt ne tegyünk. A feltételeket írjuk külön sorba. Üres sorokat ne hagyjunk.)

Törlés Feladat megadva

Szimplextáblázat:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $b$ |
| $u_1$ | 1 | 6 | 8 | 100 |
| $u_2$ | 0 | 2 | 5 | 80 |
| $u_3$ | 1 | 1 | 3 | 50 |
| $-z$ | 2 | 1 | 3 | 0 |

Eredmények:

$[x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0]$

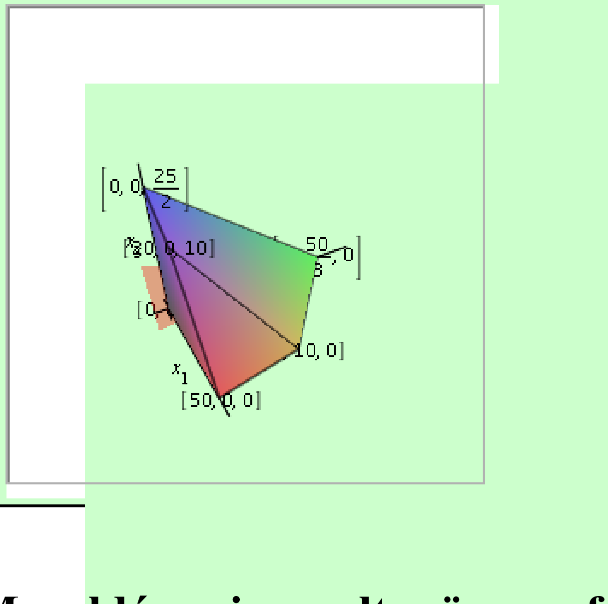
\`célfüggvény\`:$(z = 0)$

a \`megoldás\` nem \`optimális\`

Báziscsere:

u[1] ⇔ x[1] generáló elem: 1 ["a kijelölt elem nem szűk keresztmetszet"]

Végrehajtás




# Megoldásra javasolt szöveges feladatok

# A normálfeladat megoldása a Maple rendszer parancsaival

Az operációkutatás, a matematika egyéb optimalizációban érintett fejezetei elméleti eredményeinek beépítésével a Maple programcsomag alkalmassá vált arra, hogy "fekete dobozként" alkalmazva, a gyakorlati feladatokat képletekké formálva közvetlenül jussunk optimális megoldáshoz.
A szimplex módszer által igényelt eljárások a Maple *simplex* csomagjában megvalósításra kerültek.

A csomag használatát a with(simplex) : utasítással kezdeményezzük. A célfüggvény és a feltételrendszer képletként való felírása jelenti a felhasználó számára a valódi feladatot, mivel az optimális megoldás elállítás terheit teljesen átveszi a Maple rendszer.

Korábban már megoldott feladatunk (**x≥0**) és $z = \rightarrow$ max célfüggvény mellett.

Feltételrendszer:

$x_1 + x_2 \leq 4,$
$x_2 + x_3 \leq 4,$
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$

Maximalizálandó célfügvény:

$x_1 + x_3$

Az optimális megoldást a Maple *maximize* utasítása szolgáltatja.  Az *maximize* utasítás számára meg kell adni a célfüggvényt és a feltételeket. A következ parancsokat használhatjuk:

A simplex csomag használatba vétele:
*with*(*simplex*) :

Az optimalizálás:
$maximize\left(x_1 + x_3, \{ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 4, x_2 + x_3 \leq 4, x_1 + x_2 + x_3 = 6\}\right);$

$$\{x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 2\} \tag{9.1}$$

A maximize utasítást kiegészíthetjük a NONNEGATIVE paraméterrel is, ekkor egyszerbbé válhatnak a képleteink.
$maximize\left(x_1 + x_3, \{ x_1 + x_2 \leq 4, x_2 + x_3 \leq 4, x_1 + x_2 + x_3 = 6\}, NONNEGATIVE\right);$

$$\{x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = 2\} \tag{9.2}$$

Vessük össze a feladat megoldását azzal, melyet ebben a fejezetben már elállítottunk. Sajnos most nem derült ki, hogy a feladatnak létezik alternatív megoldása is.